Matematica finanziaria: prova di esame del 7 settembre 2011

(1) Si contrae un mutuo di 80 000 euro, per l'acquisto di una casa. La restituzione avviene tramite ammortamento francese. Scrivere il piano di ammortamento del prestito, tenendo presente che la rateizzazione è annuale posticipata, la durata del prestito è 4 anni, e il tasso di remunerazione del prestito è il 2% annuo.

Svolgimento. La rata R da pagare ogni anno deve essere equivalente agli 80 000 euro che ci vengono dati adesso. L'equivalenza va fatta al tasso del 2% annuo, in regime esponenziale.

$$\begin{array}{ccccc} & R & R & R & R \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \longrightarrow t = \text{anni} \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

Indicando con $v = 1/1.02$ il fattore di sconto annuale, la rata R deve soddisfare l'equazione

$$Rv + Rv^2 + Rv^3 + Rv^4 = 80\,000 \ ,$$

che ha come risultato

$$R = \frac{80\,000}{v + v^2 + v^3 + v^4} = \frac{80\,000}{v\dfrac{1-v^4}{1-v}} = \frac{80\,000 \cdot 0.02}{1-v^4} = \frac{1\,600}{1-v^4} = 21\,009.9 \ .$$

Poiché il debito residuo diminuisce dopo ogni pagamento, la quota interesse va calcolata a ogni scadenza. Dopo 1 anno dal momento in cui si è contratto il mutuo avremo $I_1 = 0.02 \cdot 80\,000 = 1\,600$, cifra che rappresenta il pagamento del fatto di aver potuto usufruire di 80 000 euro per 1 anno. Quindi, dei 21 009.9 euro che paghiamo alla fine del primo anno, soltanto $21\,009.9 - 1\,600 = 19\,409.9 = C_1$ vanno ad ammortizzare il debito residuo, che diventa quindi $D_1 = 80\,000 - C_1 = 60\,590.1$.

Analogamente, alle scadenze successive avremo:

$$I_2 = 0.02 \cdot D_1 = 1\,211.8 \ , \quad C_2 = R - I_2 = 19\,798.1 \ , \quad D_2 = D_1 - C_2 = 40\,792$$
$$I_3 = 0.02 \cdot D_2 = 815.84 \ , \quad C_3 = R - I_3 = 20\,194.1 \ , \quad D_3 = D_2 - C_3 = 20\,597.9$$
$$I_4 = 0.02 \cdot D_3 = 411.959 \ , \quad C_4 = R - I_4 = 20\,597.9 \ , \quad D_4 = D_3 - C_4 = 0 \ .$$

Il piano di ammortamento è quindi

anno	QC	QI	R	DR
1	19 409.9	1 600	21 009.9	60 590.1
2	19 798.1	1 211.8	21 009.9	40 792
3	20 194.1	815.84	21 009.9	20 597.9
4	20 597.9	411.959	21 009.9	0

□

(2) Calcolare il montante che si ottiene dopo 2 anni investendo 1 000 euro a un tasso nominale semestrale del 4% pagabile due volte a semestre. Assumere un reinvestimento delle cedole in regime di interesse composto al tasso trimestrale del 2%.

Svolgimento. La cedola nominale è $1\,000 \cdot 0.04 = 40$ euro pagata 2 volte a semestre, quindi la cedola effettiva C è pari a $40/2 = 20$ euro ogni 3 mesi. Poiché il regime di reinvestimento $r(t) = (1 + 0.02)^t$ viene dato in trimestri, conviene rappresentare l'operazione finanziaria in trimestri:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & 1\,000 \\ -1\,000 & 20 & 20 & \cdots & 20 & 20 \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \longrightarrow t = \text{trimestri} \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 7 & 8 \end{array}$$

Guardando il grafico, scriviamo il montante tra 2 anni che proviene dal reinvestimento delle cedole nel regime assegnato:

$$20(1 + 0.02)^7 + 20(1 + 0.02)^6 + \cdots + 20(1 + 0.02) + 20 = 20\frac{1.02^8 - 1}{0.02} = 171.659$$

per cui il montante finale è 1 171.659. □

(3) Quale tra le seguenti operazioni finanziarie conviene di più? Usare il criterio del TIR.

(a) $\{(-250, \text{oggi}), (50, \text{tra 1 anno}), (400, \text{tra 3 anni})\}$.

(b) $\{(-250, \text{oggi}), (50, \text{tra 1 anno}), (400, \text{tra 2 anni})\}$.

(c) $\{(-320, \text{oggi}), (440, \text{tra 1 anno})\}$.

Svolgimento. Per trovare il TIR delle 3 operazioni finanziarie date dovremmo risolvere le 3 equazioni

(a) $f_1(v) = -250 + 50v + 400v^3 = 0$.

(b) $f_2(v) = -250 + 50v + 400v^2 = 0$.

(c) $f_3(v) = -320 + 440v = 0$.

Il testo però non chiede di calcolare il TIR di ciascuna operazione finanziaria, bensì di dire quale tra esse rende di più. A tal fine, osserviamo che la prima operazione finanziaria è sicuramente meno conveniente della seconda, e quindi possiamo escluderla dal calcolo.

Ci siamo quindi ridotti a risolvere 2 equazioni molto semplici: $f_2(v) = -250 + 50v + 400v^2 = 0$ che fornisce come risultato approssimato $v_2 = 0.730$ (la soluzione negativa viene scartata in quanto per definizione TIR > -1, che equivale a $v > 0$), e $f_3(v) = -320 + 440v = 0$, che fornisce come soluzione approssimata $v_3 = 0.727$.

Poiché $v_3 < v_2$, avremo che la terza operazione finanziaria è la più conveniente.

Alcuni fatti degni di nota. Non serve il tasso ambiente, perché dobbiamo confrontare le operazioni finanziarie tra loro e non dire in assoluto quali tra esse sono accettabili. Inoltre, non dobbiamo calcolare il TIR esplicitamente come $1/v - 1$ in quanto $v_3 < v_2$ è equivalente a $i_3 > i_2$. □

(4) Si consideri un finanziamento di 3 000 euro da restituire con 3 rate mensili posticipate da 1 050 euro ciascuna, spese accessorie escluse. Calcolare il TAN del finanziamento.

Svolgimento. È il solito esercizio sul tasso interno di rendimento. L'equazione da risolvere è

$$-3000 + 1050v + 1050v^2 + 1050v^3 = 0 \ ,$$

che semplificata diviene

$$-20 + 7v + 7v^2 + 7v^3 = 0 \ .$$

Il metodo della bisezione fornisce come risultato al meglio di 2 cifre decimali

$$0.97 < v_{\text{mensile}} < 0.98 \Longrightarrow \frac{1}{0.98^{12}} - 1 < i_{\text{annuale}} < \frac{1}{0.97^{12}} - 1 \ ,$$

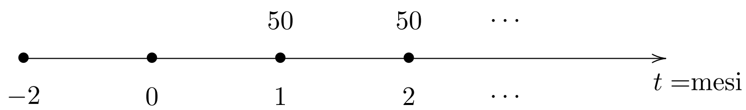
che fornisce per il TAN l'approssimazione $0.27 <$ TAN < 0.44. □

(5) Si consideri il regime finanziario in una variabile $r(t) = (1 + 0.02)^t$, con t che misura gli anni. Si dica se $r(t)$ è scindibile e si calcoli la forza d'interesse $\delta(t)$.

Svolgimento. In una variabile, un regime è scindibile se e solo se la sua forza d'interesse è costante. Questo coincide con l'essere una funzione esponenziale, quindi il regime dato è scindibile perché è esponenziale. La sua forza d'interesse è $\delta(t) = r'(t)/r(t) = \ln 1.02$. □

(6) Calcolare il valore attuale di una rendita perpetua costante posticipata, di rata 50, periodica, di periodo 1 mese, differita di 2 mesi, al tasso di valutazione del 4% mensile.

Svolgimento. Il grafico della rendita è



Con riferimento al grafico, il valore attuale richiesto è il valore in -2, che è il valore in 0 scontato di 2 mesi. Sapendo che il valore attuale di una rendita perpetua è R/i, otteniamo

$$V = \frac{50}{0.04} \cdot \frac{1}{1.04^2} = 1155.7 \ .$$

□

(7) **Solo corso da 4 crediti** Si consideri un'operazione finanziaria aleatoria così composta: al tempo 1 si guadagna 100 con probabilità 1/3 e 50 con probabilità 2/3, al tempo 2 si guadagna 100 con probabilità 2/3 e 70 con probabilità 1/3, al tempo 3 si guadagna 40 con probabilità 1/6, 50 con probabilità 1/3 e 70 con probabilità 1/2. Utilizzando il criterio del valor medio, calcolare il valore attuale al tasso di valutazione del 3% periodale.

Svolgimento. L'operazione finanziaria aleatoria è

0	1	2	3
	$\begin{cases} p(100) = 1/3 \\ p(50) = 2/3 \end{cases}$	$\begin{cases} p(100) = 2/3 \\ p(70) = 1/3 \end{cases}$	$\begin{cases} p(40) = 1/6 \\ p(50) = 1/3 \\ p(70) = 1/2 \end{cases}$

e il criterio del valor medio la trasforma in una operazione finanziaria certa:

0	1	2	3
	$100 \cdot \frac{1}{3} + 50 \cdot \frac{2}{3} = \frac{200}{3}$	$100 \cdot \frac{2}{3} + 70 \cdot \frac{1}{3} = \frac{270}{3}$	$40 \cdot \frac{1}{6} + 50 \cdot \frac{1}{3} + 70 \cdot \frac{1}{2} = \frac{350}{6}$

.

Detto $v \stackrel{\text{def}}{=} 1/1.03$ il fattore di sconto, il valore attuale è

$$V = \frac{200}{3}v + \frac{270}{3}v^2 + \frac{350}{6}v^3 = 202.942 \ .$$

□

(8) **Solo corso da 5 crediti** Le nostre preferenze sono rappresentate da una funzione di utilità $u(x) = x^2$, per $x > 0$, e la nostra ricchezza iniziale è 30. Possiamo effettuare un'operazione finanziaria aleatoria che ci permetterebbe di guadagnare 10 con probabilità 1/3 e perdere 5 con probabilità 2/3.

(a) Utilizzando il criterio dell'utilità attesa, dire se l'operazione finanziaria è conveniente.

(b) Determinare l'equivalente certo dell'operazione finanziaria.

Ci viene proposto di non effettuare l'operazione finanziaria in cambio di 3. Dire se ci conviene accettare o rifiutare la proposta.

Svolgimento. Effettuando l'operazione finanziaria, abbiamo una ricchezza di 30+10 con probabilità 1/3 e di $30 - 5$ con probabilità 2/3. L'utilità attesa U è quindi

$$U = \frac{1}{3}(30 + 10)^2 + \frac{2}{3}(30 - 5)^2 = 950 \ .$$

Il valore U appena trovato va confrontato con l'utilità della nostra ricchezza iniziale di 30, che è pari a $u(30) = 900$. Quindi l'operazione finanziaria è conveniente.

L'equivalente certo x_c è quel valore che aggiunto alla nostra ricchezza iniziale la rende equivalente all'operazione finanziaria: è quindi la soluzione di

$$u(30 + x_c) = 950 \Leftrightarrow (30 + x_c)^2 = 950 \Leftrightarrow (30 + x_c) = \pm\sqrt{950} \ .$$

La soluzione negativa va scartata perché $u(x)$ è definita solo per valori positivi di x, e pertanto otteniamo $x_c = \sqrt{950} - 30 = 0.82$.

Infine, la proposta di non effettuare l'operazione finanziaria in cambio di 3 va sicuramente accettata, perché l'operazione finanziaria per noi vale $x_c = 0.82$. □